

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ім. І. І. МЕЧНИКОВА**

О. В. ЗАТОВСЬКИЙ, В. П. ОЛЄЙНІК

Лекції з курсу

КЛАСИЧНА МЕХАНІКА

Частина 1. Динаміка Лагранжа. Малі коливання

2005

Учбове видання

Затовський Олександр Всеволодович,
Олейнік Вячеслав Петрович

Лекції з курсу

КЛАСИЧНА МЕХАНІКА

Частина 1. Динаміка Лагранжа. Малі коливання

Рецензент: Асланов С. К., доктор фіз.-мат.наук, професор
Відповідальний
редактор: Адамян В. М., доктор фіз.-мат.наук, професор

Затверджено радою фізичного
факультету ОНУ.

КЛАСИЧНА МЕХАНІКА ЛАГРАНЖА

У розділах "Механіка" загального курсу фізики проблеми механіки вирішувались на основі законів Ньютона. Там же були наведені основні поняття про системи відліку та системи координат, про час і простір, про найпростіші тіла в механіці та поняття радіуса-вектора, швидкості і прискорення, сили взаємодії і інші.

Більш загальний метод, який водночас відображає тенденції університетського курсу теоретичної фізики, побудований на основі принципів найменшої дії та відносності і їх наслідків.

1. Принцип найменшої дії (принцип Гамільтона)

Основою аналітичної механіки може бути принцип Гамільтона, згідно з яким кожна механічна система характеризується функцією Лягранжа $L(q, \dot{q}, t)$ та інтегралом дії

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (1.1)$$

таким, що для дійсного руху S має мінімальне значення серед всіх можливих законів руху системи, яка в моменти часу t_1 і t_2 займає положення з координатами $q(t_1)$ і $q(t_2)$.

Умова, що L залежить тільки від координат та швидкостей і не залежить від більш високих похідних по часу, відповідає установленому емпіричним шляхом твердженню, що механічний стан системи повністю задається тільки координатами та швидкостями. Інтеграл дії фактично є функціоналом законів руху, так що його екстремальне значення відповідає умові - перша варіація $\delta S = 0$.

Нехай для дійсного одновимірного руху

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt,$$

а для нескінченно близького $q(t) + dq(t)$, що розпочинається і закінчується в тих же точках,

$$S[q + dq] = \int_{t_1}^{t_2} L(q + dq, \dot{q} + d\dot{q}, t) dt.$$

Обчислимо різницю лише з точністю до лінійних відносно dq і $d\dot{q}$ членів (першу варіацію функціоналу S)

$$dS[q] = S[q + dq] - S[q] \approx \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} dq + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d\dot{q} \right) dt.$$

Умова екстремальності дії $dS=0$. Оскільки $d\dot{q} = \frac{d}{dt}dq$, то після інтегрування по частинам маємо

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt. \quad (1.2)$$

При довільних варіаціях $\delta q(t)$ інтеграл буде мати нульове значення лише при умові

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}. \quad (1.3)$$

Це рівняння Лагранжа і воно еквівалентне умові екстремальності дії $\delta S=0$. Для механічної системи з довільним числом ступенів вільності варіації для кожної з координат незалежні, так що

$$dS = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt$$

з еквівалентною умовою у формі рівнянь Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.4)$$

Самі закони руху $q_i(t)$ визначаються з системи рівнянь Лагранжа при явному вигляді функції Лагранжа і початкових умов. Модельна побудова функції Лагранжа для конкретної механічної системи являється найважливішим етапом механіки і фізики.

Динамічні закони Ньютона також можна записати у формі Лагранжа. У найпростішому випадку консервативних систем, для яких сила визначається потенціальною енергією

$$\mathbf{F}_a = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_a} U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N), \quad (1.5)$$

закони Ньютона $m_a \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_a = \mathbf{F}_a$ можна записати у формі рівнянь Лагранжа, якщо функцію Лагранжа взяти у вигляді

$$L = \frac{1}{2} \sum_{b=1}^N m_b \dot{\mathbf{r}}_b^2 - U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N). \quad (1.6)$$

Наведемо декілька прикладів на екстремальні принципи з геометрії і фізики.

1.1. Задача Плато про мінімальну поверхню обертання. Нехай на площині (xy) задано дві точки з координатами (x_1, y_1) і (x_2, y_2) . Знайдемо таку форму кривої $y(x)$, яка проходить через ці точки та при обертанні навколо осі x опише мінімальну поверхню.

Площа поверхні при обертанні елемента dl

$$ds = 2\pi y dl = 2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2\pi y \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Повна поверхня

$$s[y] = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y') dx$$

являється функціоналом форми $y(x)$, а мінімальною поверхня буде, якщо перша варіація s по y буде нульовою

$$ds = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dy(x) dx = 0, \quad (dy(x_1) = dy(x_2) = 0).$$

Таким чином, задовольнити умову екстремальності для довільних варіацій δy можна, якщо виконуються рівняння Ейлера

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \quad (1.7)$$

Оскільки

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y'' + \frac{\partial f}{\partial x},$$

то інша форма рівняння Ейлера має вигляд

$$\frac{d}{dx} \left(f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

У нашому випадку $f = 2\pi y \sqrt{1 + y'^2}$. Оскільки явно f від x не залежить, то $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ і $f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = 2\pi a$, де a - постійна інтегрування. Отже, маємо диференціальне рівняння

$$y \sqrt{1 + y'^2} - \frac{yy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = a,$$

змінні якого розділяються. Перший інтеграл $y(x) = ach \frac{x+b}{a}$, а постійні

a та b знаходимо з умов $y_{1,2} = ach \frac{x_{1,2} + b}{a}$. Поверхня, утворена такою залежністю, називається катеноїдом.

1.2. Задача про брахістрохрону. Це задача про форму кривої, по якій без тертя під дією однорідного гравітаційного поля частинка маси m переміщується без початкової швидкості з точки А в точку В за найменший час (рис.1).

Скористаємося законом збереження енергії

$$\frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy = E = mgh.$$

Запишемо його у вигляді

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{2g(h-y)} dt, \text{ так що}$$

$$\Delta t[y] = \int_{x_a}^{x_b} \left[\frac{1+y'^2}{2g(h-y)} \right]^{\frac{1}{2}} dx.$$

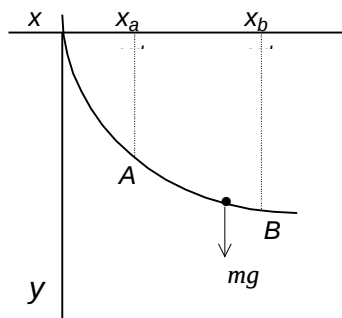


Рис. 1

За умовою $d\Delta t = 0$, і знову маємо як наслідок рівняння Ейлера з функцією

$$f = \left[\frac{1+y'^2}{2g(h-y)} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Закінчити розв'язок задачі самостійно.

1.3. Ще один приклад з оптики - принцип Ферма. Із всіх кривих, що з'єднують точки А і В, траєкторією променя буде та, на поширення по якій промінь займе найменше часу.

2. Властивості функції Лагранжа. Принцип відносності Галілея

Розглянемо механічну систему, яка складається з двох підсистем з функціями Лагранжа L_A та L_B . Якщо взаємодія між цими підсистемами відсутня, то $L_{AB} = L_A + L_B$. Це можливо лише в тому випадку, коли відстань між підсистемами необмежено збільшується

$$\lim_{r_{AB} \rightarrow \infty} L_{AB} = L_A + L_B. \quad (2.1)$$

Ця властивість адитивності фактично вказує на те, що рівняння руху для кожної з невзаємодіючих частин не містить величин, які відносяться до інших частин системи.

Функція Лагранжа механічної системи інваріанта відносно повної похідної по часу. Дійсно, якщо дві функції Лагранжа відрізняються на повну похідну

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} \Psi(q, t),$$

то

$$S' = S + \Psi(q_2, t_2) - \Psi(q_1, t_1)$$

і дія відрізняється на члени, які при варіаціях випадають. Це означає, що закони руху (рівняння Лагранжа) залишаються незмінними.

Рівняння Лагранжа не змінюються, якщо функцію Лагранжа домножимо на постійне число.

Завжди можна знайти таку систему відліку, відносно якої простір є однорідним та ізотропним, а час - однорідним. Така система називається інерційною.

Відносно інерційної системи функція Лагранжа частинки, яка вільно рухається, не повинна явно залежити ні від вектора положення частинки, ні від часу. Залежність же функції Лагранжа від швидкості може бути тільки у формі $L = L(v^2)$. Таким чином, рівняння Лагранжа має вигляд

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = 0 \quad \text{і} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = \vec{\text{const}},$$

так що маємо $\dot{\mathbf{r}} = \text{const}$. Цей висновок вказує на те, що в інерційній системі відліку вільна частинка рухається з постійною швидкістю, у повній відповідності з законом інерції Ньютона. Якщо є інша інерційна система відліку, яка рухається відносно першої прямолінійно і рівномірно, то закони вільного руху частинки відносно нової системи такі ж, як і відносно першої.

Досліди показують, що такі системи будуть еквівалентними не тільки відносно вільного руху. Інерціальні системи еквівалентні відносно всіх механічних явищ. Властивості простору та часу в таких системах ідентичні, а закони механіки інваріантні. Ці твердження - принцип відносності Галілея. Закони перетворення радіуса-вектора частинки $\dot{\mathbf{r}}$ і $\dot{\mathbf{r}}'$ відносно систем відліку K і K' (K' рухається з швидкістю $\dot{\mathbf{V}}$) мають вигляд

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \dot{\mathbf{V}}t, \quad (2.3)$$

при цьому час плине однаково $t = t'$. Ці формули називають перетвореннями Галілея.

Принцип відносності, який відповідає однорідному евклідовому простору разом з незалежним часом, являється класичним. Одним з його наслідків є формула додавання швидкостей $\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}' + \dot{\mathbf{V}}$. Дослідна перевірка, проведена на початку сторіччя, показала її наближений характер, особливо при швидкостях, які близькі до швидкості світла. Цей факт разом з ідеями Фітджеральда та Лоренца про стисливість тіл у напрямі руху привели Ейнштейна до корінного перегляду поняття часу. Замість абсолютного, незалежного часу час, пов'язаний з просторовими евклідовими координатами в плоскому чотиривимірному просторово-часовому континіумі, був більш задовільним. Така концепція приводила до малих ефектів в класичній механіці Ньютона, але дозволила побудувати перетворення Лоренца, які в однаковій мірі справедливі як для механічних, так і для електромагнітних явищ.

Спеціальна теорія відносності Ейнштейна не з'ясувала природу сили тяжіння і не дозволила за допомогою кінематичних перетворень позбавитись від неї. Гравітаційні сили зникли, коли Ейнштейн запропонував відмовитись від евклідової геометрії та скористатись уявою про кривизну простору, яка характеризується властивостями інертної маси.

3. Функція Лагранжа вільної матеріальної частинки та системи взаємодіючих частинок. Рух при накладених зв'язках

Побудуємо функцію Лагранжа вільної частинки в інерціальній системі відліку K . В цьому разі $L = L(v^2)$. Якщо інша інерціальна система K' рухається з швидкістю $\dot{\mathbf{V}}$ відносно K , то $\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}' + \dot{\mathbf{V}}$ і $L' = L(\dot{\mathbf{r}}'^2) = L(\dot{\mathbf{r}}^2 - 2\dot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{V}} + \dot{\mathbf{V}}^2)$. Нехай $\dot{\mathbf{V}} = \dot{\mathbf{e}}$ - нескінченно мала швидкість. Розкладаючи цей вираз в ряд Тейлора з точністю до першого порядку по $\dot{\mathbf{e}}$, маємо

$$L' = L(\dot{\mathbf{r}}^2) - \frac{\partial L(\dot{\mathbf{r}}^2)}{\partial \dot{\mathbf{r}}^2} 2\dot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{e}} + \dots$$

У відповідності з принципом відносності Галілея функції Лагранжа L і L' можуть відрізнятися лише на повну похідну по часу. Це можливо, якщо $\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}^2} = \frac{1}{2}a$ - постійна, так що

$$L = \frac{1}{2} a \dot{\mathbf{r}}^2. \quad (3.1)$$

Але якщо така функція Лагранжа задовольняє принципу відносності для малих швидкостей, то вона ж задовольняє принципу відносності і для довільних швидкостей відносного руху. Дійсно

$$L' = \frac{a}{2} \dot{\mathbf{v}}'^2 = \frac{a}{2} (\dot{\mathbf{v}}^2 - 2\dot{\mathbf{v}}\dot{\mathbf{V}} + \dot{\mathbf{V}}^2) = \frac{a}{2} \dot{\mathbf{v}}^2 + \frac{d}{dt}(-a\dot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{V}} + \frac{a}{2}\dot{\mathbf{V}}^2 t)$$

і останній вклад можна опустити. Оскільки функція Лагранжа адитивна, то для системи невзаємодіючих частинок

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2,$$

де m_i - маси частинок.

Для замкненої системи взаємодіючих частинок функція Лагранжа моделюється додатковим вкладом, який залежить тільки від положень самих частинок.

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 - U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N). \quad (3.2)$$

Тут перший вклад - кінетична енергія, другий- потенціальна енергія взаємодії. Потенціальна енергія залежить від радіусів-векторів частинок в один і той же момент часу, так що зміна положення однієї з частинок миттєво позначається на всіх інших - взаємодія розповсюджується миттєво. Такий характер взаємодії в класичній механіці пов'язаний з абсолютністю часу і принципом відносності Галілея. З рівняння Лагранжа маємо

$$\frac{d}{dt} m_a \dot{\mathbf{r}}_a = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_a} U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N),$$

а зіставляючи цей результат з динамічним законом Ньютона з'ясовуємо фізичний зміст потенціальної енергії замкненої системи: мінус градієнт цієї функції по вектору положення $\dot{\mathbf{r}}_a$ дорівнює силі, діючій на цю частинку

$$\mathbf{F}_a = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_a} U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N). \quad (3.3)$$

Зустрічаються механічні системи, в яких взаємодія між складовими частинами системи має характер зв'язків (обмежень), які накладаються на взаємне розташування тіл системи. У деяких випадках дію зв'язків можна виразити рівняннями, які пов'язують

координати частинок. Наприклад, якщо дві частинки міцно зв'язані стержнем довжиною h , то

$$\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - h^2 = 0. \quad (3.4)$$

Зв'язок, вплив якого на рух системи виражається рівнянням

$$\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = 0 \quad (3.5)$$

називають голономним. Такий зв'язок буде стаціонарним, якщо у ньому нема у явному вигляді залежності від часу. Зв'язок - це модель деякої взаємодії, природа якої не розглядається. Неголономний зв'язок пов'язує не тільки координати, але й швидкості частинок системи.

Якщо на систему накладено l голономних зв'язків

$$\Phi_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = 0, \dots, \Phi_l(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = 0,$$

то їх роль зведеться до зменшення повного числа ступенів вільності на l , тобто $s = n - l = 3N - l$. Рівняння Лагранжа мають такий же вигляд, але їх число зменшено на l .

Виключити l ступенів вільності краще всього шляхом введення узагальнених змінних $q_1(t), \dots, q_s(t)$, через які декартові координати частинок можуть бути виражені співвідношеннями

$$x_j(t) = f_j(q_1, \dots, q_s, t), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.6)$$

а рівняння зв'язків задовольняються тотожно. При цьому

$$\dot{x}_j(t) = \frac{\partial f_j}{\partial t} + \sum_{k=1}^s \frac{\partial f_j}{\partial q_k} \dot{q}_k.$$

В стаціонарному випадку, коли

$$L = \frac{1}{2} \sum_{k,k'}^s a_{kk'}(q_1, \dots, q_s) \dot{q}_k \dot{q}_{k'} - U(q_1, \dots, q_s), \quad (3.7)$$

рівняння Лагранжа мають стандартний вигляд

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}, \quad k = 1, 2, \dots, s.$$

Задача 3.1. Особливістю рівнянь Лагранжа є їх інваріантність відносно точкових перетворень $Q_i = Q_i(q_1, \dots, q_s)$, $i = 1, 2, \dots, s$. Докажіть це самостійно.

4. Закони збереження та їх зв'язок з однорідністю часу та однорідністю і ізотропністю простору

Механічна система з s ступенями вільності рухається за законами, які в диференціальній формі мають вигляд рівнянь Лагранжа. Закони руху в інтегральній формі, які знаходяться з цих рівнянь

$$q_l(t) = q_l(t, c_1, c_2, \dots, c_{2s}), l = 1, \dots, s \quad (4.1)$$

та швидкості

$$\dot{q}_l(t) = \dot{q}_l(t, c_1, c_2, \dots, c_{2s}), l = 1, \dots, s \quad (4.2)$$

залежать від $2s$ сталих інтегрування. Розв'язавши систему (4.1), (4.2) алгебраїчних рівнянь відносно c_j , матимемо $2s$ інтегралів руху, тобто величин, які не змінюються незважаючи на зміни стану механічної системи з плином часу.

Серед інтегралів руху найважливіше значення мають ті, походження яких пов'язане з основними властивостями простору та часу - їх однорідністю та ізотропністю. Всі вони задовольняють властивості адитивності - їх значення для системи невзаємодіючих підсистем дорівнює сумі значень для кожної з підсистем.

Розпочнемо з закону збереження, пов'язаного з однорідністю часу. Однорідність часу означає, що функція Лагранжа відповідної системи явно не зажить від часу $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$. В цьому випадку

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right).$$

З рівнянь Лагранжа випливає $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, так що

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^s \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right).$$

Звідси для комбінації

$$E = \sum_{i=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L, \quad (4.3)$$

яку називають механічною енергією, маємо $\frac{dE}{dt} = 0$, тобто E - інтеграл руху. Адитивність енергії визначається адитивністю функції Лагранжа.

Закон збереження енергії виконується як для замкнених систем, так і для систем у зовнішньому постійному полі. Механічні системи, енергія яких зберігається, являються консервативними. Оскільки

кінетична енергія - однорідна функція квадрату швидкості, то за теоремою Ейлера

$$\sum_{i=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_i} \dot{\phi}_i = 2T,$$

так що $E = T(q, \dot{q}) + U(q)$.

З однорідністю простору пов'язаний закон збереження імпульсу механічної системи. Однорідність простору означає, що функція Лагранжа замкненої системи не повинна змінюватися при перенесенні всієї системи як цілого на будь-який відрізок. У частинному випадку, коли радіуси-вектори частинок змінюються на нескінченно малу величину $\dot{\mathbf{e}}$

$$\mathbf{r}_a \rightarrow \mathbf{r}_a + \dot{\mathbf{e}}$$

відповідну зміну функції Лагранжа можна записати у формі

$$dL = \sum_{a=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} d\mathbf{r}_a = \dot{\mathbf{e}} \sum_{a=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a}.$$

Внаслідок однорідності простору $dL = 0$, а оскільки $\dot{\mathbf{e}}$ - довільний вектор, то

$$\sum_{a=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} = 0.$$

З рівнянь Лагранжа маємо $\frac{d}{dt} \sum_{a=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{v}}_a} = 0$,

тобто вектор імпульсу

$$\mathbf{P} = \sum_{a=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{v}}_a}$$

є інтегралом руху. Імпульс системи, з врахуванням явного вигляду L , дорівнює сумі імпульсів усіх частинок

$$\mathbf{P} = \sum_{a=1}^N \mathbf{p}_a \quad (4.4)$$

і завжди адитивний.

Підкреслимо, що окремі компоненти вектора імпульсу можуть зберігатися і у зовнішньому полі, якщо потенціальна енергія не залежить від відповідної проекції радіуса-вектора.

Результат $\sum_{a=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} = 0$ в декартових координатах можливо записати у вигляді

$$\sum_{a=1}^N \mathbf{F}_a = 0, \quad (4.5)$$

де $\dot{\mathbf{F}}_a$ - сила, яка діє на частинку a . Для системи з двох частинок $\dot{\mathbf{F}}_1 + \dot{\mathbf{F}}_2 = 0$ маємо закон рівності дії і протидії.

Імпульс механічної системи різний відносно різних систем відліку. Якщо система K' рухається відносно K з швидкістю $\dot{\mathbf{V}}$, то $\mathbf{r}_{v_a} = \mathbf{r}'_a + \dot{\mathbf{V}}$. Для імпульсів маємо

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}' + \dot{\mathbf{V}} \sum_{a=1}^N m_a. \quad (4.6)$$

Звідси видно, що існує така система відліку, відносно якої $\dot{\mathbf{P}}' = 0$. Швидкість руху такої системи як цілого

$$\dot{\mathbf{V}} = \dot{\mathbf{P}} \left(\sum_{a=1}^N m_a \right)^{-1}. \quad (4.7)$$

Цей результат можна записати у вигляді $\dot{\mathbf{V}} = \dot{\mathbf{R}}$, де

$$\dot{\mathbf{R}} = \frac{\sum_{a=1}^N m_a \dot{\mathbf{r}}_a}{\sum_{a=1}^N m_a} \quad (4.8)$$

радіус-вектор центру інерції механічної системи, тоді $\dot{\mathbf{V}}$ - швидкість руху центру інерції механічної системи. Закон перетворення механічної енергії від системи K до K' має вигляд

$$E = E' + \dot{\mathbf{V}} \mathbf{P} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{V}}^2 \sum_{a=1}^N m_a. \quad (4.9)$$

Ще один закон збереження впливає з ізотропності простору. Під ізотропністю простору розуміють еквівалентність усіх напрямів в ньому. Внаслідок ізотропності простору функція Лагранжа не зміниться, якщо усю систему як ціле повернути на нескінченно малий кут dj навколо довільної осі. При цьому всі вектори змінюють орієнтацію, а їх приріст можливо записати у вигляді

$$d \mathbf{r}_a = [d j \mathbf{r}_a], \quad d \mathbf{v}_a = [d j \mathbf{v}_a]. \quad (4.10)$$

Умова незмінності функції Лагранжа

$$d L = \sum_{a=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} d \mathbf{r}_a + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} d \mathbf{v}_a \right) = 0.$$

Оскільки $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} = \mathbf{p}_a$, $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = \mathbf{p}_a$, то варіація функції Лагранжа приймає вигляд

$$d L = d j \sum_{a=1}^N \left([\mathbf{r}_a, \mathbf{p}_a] + [\mathbf{v}_a, \mathbf{p}_a] \right) = d j \frac{d}{dt} \sum_{a=1}^N [\mathbf{r}_a, \mathbf{p}_a] = 0.$$

Внаслідок довільності $d\dot{\mathbf{j}}$ маємо адитивний інтеграл руху

$$\dot{\mathbf{M}} = \sum_{a=1}^N [\dot{\mathbf{r}}_a, \dot{\mathbf{p}}_a] \quad (4.11)$$

- момент імпульсу системи.

В обмеженому вигляді цей закон має місце і для систем у зовнішньому полі, якщо воно має вісь симетрії. Найбільш важливим випадком такого поля є поле з центральною симетрією. При русі у такому полі зберігається проекція вектора моменту $\dot{\mathbf{M}}$ на довільну вісь, що проходить через центр, тобто, зберігається вектор $\dot{\mathbf{M}}$, визначений відносно центра поля.

Якщо система K' рухається відносно K з швидкістю $\dot{\mathbf{V}}$ центра маси системи, то закон перетворення для моменту імпульсу має вигляд

$$\dot{\mathbf{M}} = \dot{\mathbf{M}}' + [\dot{\mathbf{R}}, \dot{\mathbf{P}}].$$

Задача 4.1. Вказати, які з компонент імпульсу $\dot{\mathbf{P}}$ чи моменту імпульсу $\dot{\mathbf{M}}$ зберігаються, якщо механічна система рухається у полі:

- а) нескінченної однорідної площини,
- б) нескінченного однорідного циліндра,
- н) нескінченної однорідної призми,
- г) двох точкових мас,
- д) однорідної напівплощини,
- е) однорідного конуса,
- ж) однорідного тора,
- з) однорідної гвинтової лінії.

Задача 4.2. Побудувати функцію Лагранжа подвійного плоского маятника у полі тяжіння. Побудувати функцію Лагранжа пружинного маятника.

5. Закони одновимірного руху

Розглянемо рух механічної системи з одним ступенем вільності. Функція Лагранжа такої системи у постійному зовнішньому полі має вигляд

$$L = \frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2 - U(q), \quad (5.1)$$

де $a(q)$ узагальнена маса системи. Оскільки поле постійне, то система консервативна з постійною повною енергією

$$E = \frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2 + U(q). \quad (5.2)$$

Цей вираз будемо розглядати як диференційне рівняння першого порядку, звідки після інтегрування маємо

$$t = \int \sqrt{\frac{a(q)}{2(E - U(q))}} dq + t_0. \quad (5.3)$$

Це і є у неявному вигляді закон руху $q = q(t, E, t_0)$, який залежить від постійних інтегрування E і t_0 .

Нехай узагальнена маса не залежить від координати, тобто $a(q) = m$. Введемо нове позначення для координати $q = x$. Оскільки кінетична енергія невід'ємна, то з закону збереження енергії маємо $E \geq U(x)$. Рух можливий тільки в області, де виконується така нерівність. На рис.2 зображено графік потенціальної енергії та рівень повної енергії системи.

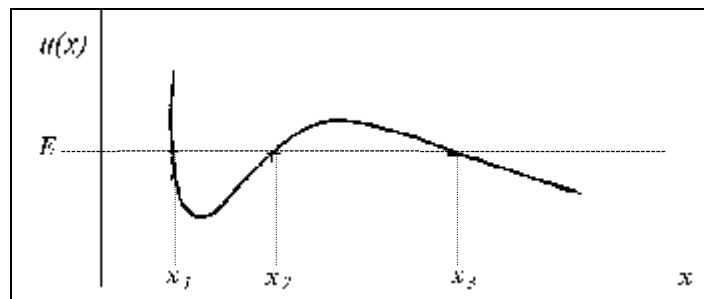


Рис. 2

Можливі області руху визначаються координатами $x_1 \leq x \leq x_2$, $x \geq x_3$. Точки, в яких $E = U(x)$, називаються точками зупинки, оскільки в цих точках швидкість дорівнює нулю. Якщо область руху обмежена з двох сторін, то рух буде фінітним, в іншому випадку частинка може віддалитися на необмежену відстань і рух інфінітний. Одновимірний фінітний рух завжди коливний (у потенціальній ямі між значеннями координат x_1 і x_2). При цьому час руху від x_1 до x_2 такий же, як і від x_1 до x_2 , так що період руху визначається виразом

$$T(E) = \sqrt{2m} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}, \quad (5.4)$$

а межі інтеграла - це корні рівняння

$$E = U(x).$$

Задача 5.1. Визначити період коливання плоского математичного маятника в залежності від амплітуди.

Скористуємося інтегралом енергії

$E = \frac{ml^2 \dot{j}^2}{2} - mgl \cos j = -mgl \cos j_0, j < j_0$, де j_0 точка зупинки. Період коливань визначаємо наступним інтегралом

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dl}{(1 - \sin^2 \frac{j_0}{2} \sin^2 l)^{\frac{1}{2}}} = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} c(\sin^2 \frac{j_0}{2}),$$

c - повний еліптичний інтеграл першого роду. При малих амплітудах коливань $j_0 \ll 1$ після розкладу підінтегрального виразу в ряд і почленного інтегрування маємо результат

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} (1 + \frac{1}{16} j_0^2 + K). \quad (5.5)$$

Задача 5.2. Визначити період коливань частинки з масою m у зовнішньому полі $U(x) = U_0 \cdot tg^2 kx$.

6. Задача двох тіл. Зведена маса

Закони руху у повному аналітичному вигляді встановлюються для дуже важливого випадку двох взаємодіючих частинок, коли потенціальна енергія взаємодії залежить лише від відстані між частинками, тобто від $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$. Це задача двох тіл. Функція Лагранжа такої системи має вигляд

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2 - U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|). \quad (6.1)$$

Замість радіусів-векторів $\vec{r}_1$ і $\vec{r}_2$ введемо вектор взаємної відстані частинок $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ та вектор положення центру мас

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}.$$

З цих співвідношень знаходимо

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \vec{r} \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad \vec{r}_2 = \vec{R} - \vec{r} \frac{m_1}{m_1 + m_2}. \quad (6.2)$$

Підставляючи ці координати у функцію Лагранжа, маємо

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}}^2 - U(r),$$

тобто функція Лагранжа розділилася на дві незалежні частини

$$L = L_1(\vec{R}) + L_2(\vec{r}, \dot{\vec{r}}). \quad (6.3)$$

Функція Лагранжа L_1 описує рух центру мас системи. Оскільки вона не залежить від $\dot{\vec{R}}$, то швидкість зміни цього вектора $\dot{\vec{R}} = \vec{V}$ постійна, тобто цент мас системи рухається, як вільна частинка з масою $m_1 + m_2$, і закон руху має вигляд

$$\dot{\vec{R}}(t) = \dot{\vec{R}}(0) + \vec{V}t. \quad (6.4)$$

Функція Лагранжа L_2 описує зміну взаємної відстані між частинками системи у процесі руху. Ця зміна відбувається таким же чином, як рух частинки зі зведеною масою

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

у зовнішньому центральному полі $U(r)$, симметричному відносно початку координатної системи, співпадаючої з центром мас

$$L_2 = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - U(r). \quad (6.5)$$

Таким чином, задача про рух двох взаємодіючих частинок зводиться до задачі про рух однієї частинки у заданому зовнішньому полі $U(r)$. По законах руху $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}(t)$ встановлюються закони руху першої $\vec{r}_1$ та другої частинок $\vec{r}_2$ у відповідності до перетворень (6.2). Відмітимо, що адитивність функції Лагранжа у задачі двох тіл виконується для будь-яких відстаней між частинками.

7. Рух у центральному полі

Рух частинки у центральному полі $U(r)$ почнемо з аналізу

законів збереження. Раніше було встановлено, що в центральному полі виконується закон збереження моменту імпульсу відносно центра поля, тобто $\dot{\mathbf{M}} = [\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{p}]$. Звідси випливає, що сталість $\dot{\mathbf{M}}$ призводить до того, що вектор $\dot{\mathbf{r}}$ мінюється лише в площині, нормальній до $\dot{\mathbf{M}}$, тобто траєкторія руху частинки у центральному полі завжди лежить в одній площині. Функція Лагранжа у полярних координатах в такій площині має вигляд

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\phi}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - U(r). \quad (7.1)$$

Ця функція не залежить явно від j , так що координата j - циклічна. З рівняння Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

випливає, що узагальнений імпульс $P_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \dot{\phi}$ зберігається.

Легко встановити, що $M_z = M = mr^2 \dot{\phi}$, і ми знову маємо закон збереження моменту імпульсу. Секторна швидкість $\dot{\phi}$ і момент імпульсу тісно пов'язані між собою $\dot{\mathbf{M}} = 2m\dot{\phi}\mathbf{r}$, тобто сталість моменту означає сталість секторної швидкості, звідки випливає другий закон Кеплера - за рівні проміжки часу радіус-вектор частинки описує рівні площини.

Закони руху встановимо, скориставшись ще й законом збереження енергії

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{\phi}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + U(r). \quad (7.2)$$

Підставляючи $\dot{\phi}$ з закону збереження моменту імпульсу, маємо

$$E = \frac{m}{2}\dot{\phi}^2 + U_{ef}(r), \quad (7.3)$$

де введена ефективна потенціальна енергія, яка містить в собі крім потенціальної енергії $U(r)$ ще й центробіжну енергію $\frac{M^2}{2mr^2}$:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\phi}^2 + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r) = \frac{m}{2}\dot{\phi}^2 + U_{ef}(r), \quad (7.4)$$

Задача тепер звелася до одновимірної вздовж радіальної змінної. Границі руху встановлюються з нерівності

$$E \geq U_{ef}(r), \quad (7.5)$$

а ті точки, в яких $E = U_{ef}(r)$, називають точками повороту траєкторії,

оскільки у цих точках $\dot{r} = 0$, але $j = \frac{M}{mr^2} \neq 0$, тобто повна швидкість відмінна від нуля. Закон руху вздовж радіальної змінної визначається інтегралом

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{E - U_{ef}(r)}} + t_0. \quad (7.6)$$

Тепер, скориставшись законом збереження моменту імпульсу у формі $dj = \frac{M}{mr^2} dt$, знаходимо траєкторію руху у вигляді

$$j = \frac{M}{\sqrt{2m}} \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - U_{ef}(r)}} + j_0. \quad (7.7)$$

Закон руху $j(t)$ одержимо, якщо після інтегрування замість $r(t)$ підставити одержаний вище закон руху (7.6). Оскільки j ніколи не змінює свій знак, j завжди монотонно зростає або монотонно зменшується.

Рух у центральному полі може бути інфінітним, якщо накладена умова $r \geq r_{\min}$. Якщо ж $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$, то рух фінітний, а траєкторія руху повністю розміщується всередині кільця з радіусами $r_{\min}, r_{\max}$. При цьому траєкторія не обов'язково замкнена, оскільки за час зміни радіальної складової від $r_{\min}$ до $r_{\max}$ і знову до $r_{\min}$, сам радіус-вектор повертається на кут

$$Dj = \frac{2M}{\sqrt{2m}} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - U_{ef}(r)}}. \quad (7.8)$$

Умова того, що траєкторія буде замкнена, має вигляд $Dj = 2\pi \frac{n_1}{n_2}$, де n_1 і n_2 - цілі числа. Існує тільки два типи центральних полів, у яких усі траєкторії фінітних рухів замкнені. Це гравітаційне поле та поле просторового осцилятора.

Якщо відраховувати кут j від напрямку радіуса-вектора, проведеного у точку повороту, то траєкторія руху буде симетричною відносно цього напрямку.

Наявність центробіжної енергії, яка при $r \rightarrow 0$ зростає до нескінченності, призводить до того, що не завжди частинка може "впасти" на центр. Це можливо лише тоді, коли виконується умова

$$\frac{m\hbar^2}{2} = E - \frac{M^2}{2mr^2} - U(r) > 0.$$

Звідси

$$\lim_{r \rightarrow 0} \{r^2 U(r)\} < -\frac{M^2}{2m},$$

тобто $U(r)$ повинно зменшуватися до $-\infty$ як $-a r^{-2}$ з $a < \frac{M^2}{2m}$, або ж $U(r) \sim -r^{-n}$ з $n > 2$.

8. Задача Кеплера

Важливим випадком центрального поля є поле гравітаційної взаємодії та електростатичної взаємодії. Перше з них завжди відповідає притягання, а друге - як притягання, так і відштовхуванню.

Вивчемо спочатку закони руху в полі притягання, для якого

$$U(r) = -\frac{a}{r}, \quad (8.1)$$

де $a = g m_1 m_2$ для гравітаційної взаємодії двох тіл, та $g = q_1 q_2$ для різнойменних зарядів. Знайдемо закони руху в системі центра мас. В цій системі ефективна потенціальна енергія

$$U_{\text{ef}}(r) = -\frac{a}{r} + \frac{M^2}{2mr^2} \quad (8.2)$$

має вигляд, зображений на рис.3, а m - зведена маса. Мінімум функції знаходиться з умови

$$\frac{\partial U_{\text{ef}}}{\partial r} = \frac{a}{r^2} - \frac{M^2}{mr^3} = 0,$$

тобто

$$r_0 = \frac{M^2}{a m} = p. \quad (8.3)$$

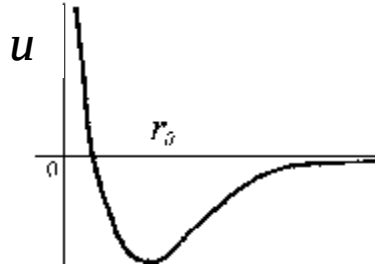


Рис. 3

Найменше можливе значення потенціальної енергії від'ємне $U_{ef}(r_0) = -\frac{ma^2}{2M^2}$, так що рух можливий лише при повній енергії $E > -\frac{ma^2}{2M^2}$. Якщо $E > 0$, то рух інфінітний, при $0 > E \geq -\frac{ma^2}{2M^2}$ рух фінітний з точками повороту, що визначаються рівнянням $E = U_{ef}(r)$, тобто

$$\frac{M^2}{2mr^2} - \frac{a}{r} - E = 0.$$

Корні цього квадратного рівняння відносно $\frac{1}{r}$ мають вигляд

$$\frac{1}{r_{1,2}} = \frac{ma}{M^2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{ma^2}} \right),$$

або з врахуванням значення r

$$\frac{1}{r_{1,2}} = \frac{1}{r} (1 \pm e), \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{ma^2}}. \quad (8.4)$$

Для фінітного руху $1 > e \geq 0$ і

$$r_{\min} = r_1, r_{\max} = r_2, e = \frac{r_{\max} + r_{\min}}{r_{\max} - r_{\min}}.$$

Знайдемо траєкторію фінітного руху, яка в інтегральній формі задається умовою (7.6). Підставимо наш ефективний потенціал і введемо заміну змінної інтегрування $\frac{M}{r\sqrt{2m}} = x$, так що

$$j = j_0 - \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + \frac{a\sqrt{2m}}{M^2}x + E}}.$$

Виділивши повний квадрат під радикалом, маємо

$$j = j_0 + \arccos \left[\frac{1}{e} \left(\frac{p}{r} - 1 \right) \right]. \quad \text{Звідси}$$

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(j - j_{p0})}. \quad (8.5)$$

Це рівняння конічного перерізу з фокусом у центрі мас, p і e - фокальний параметр і ексцентриситет орбіти. Якщо в початковий момент часу $t = 0$ $r(0) = \frac{p}{1+e}$, то $j_0 = 0$, і траєкторія - еліпс (рис.4).

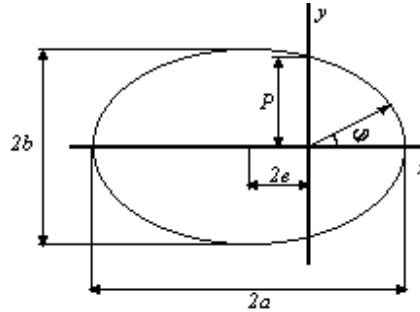


Рис. 4

Як видно з викладок, такий же вигляд має траєкторія руху частинки в центральному полі притягання і при $E > 0$, тільки в цьому разі $e > 1$ і траєкторією буде гіпербола з фокусом у центрі поля. При $e = 1$ ($E = 0$) крива переходить у параболу, а при $e = 0$ ($E = U_{\min}$) - в коло радіуса r_0 . Нехай a і b - піввісі еліпса. Тоді вони пов'язані з параметрами нашої задачі співвідношеннями

$$a = \frac{P}{1 - e^2} = \frac{a}{2|E|}, \quad b = \frac{P}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{M}{\sqrt{2m|E|}}. \quad (8.6)$$

Знайдемо тепер закони руху по еліптичній траєкторії, використавши закон руху по радіальній змінній у загальній формі (7.5). Підставимо наш ефективний потенціал і зробимо очевидні перетворення

$$t = t_0 + \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \int \frac{r dr}{\sqrt{-r^2 + r \frac{a}{|E|} - \frac{M^2}{2m|E|}}}.$$

Оскільки $\frac{a}{|E|} = 2a$, то виділивши під корнем повний квадрат, маємо

$$t = t_0 + \sqrt{\frac{ma}{a}} \int \frac{rdr}{\sqrt{a^2 e^2 - (r-a)^2}}.$$

Замість змінної r введемо параметр x співвідношенням

$$r = a - ae \cos x, \quad (8.7a)$$

після чого інтеграл буде елементарним

$$t = t_0 + \sqrt{\frac{ma}{a}} a^{\frac{3}{2}} (x - e \sin x). \quad (8.7b)$$

Два останні рядки і дають параметричну форму закону руху вздовж радіальної змінної. При $t = 0$ $r = r_{\min} = \frac{p}{1+e} = (1-e)a$, так що $x(t=0) = 0$ і

$t_0 = 0$. При $r = r_{\max} = \frac{p}{1-e} = (1+e)a$, $x_{\max} = p$, і параметр x змінюється від 0 до p , а потім від p до $2p$. Закон руху по кутовій змінній відновлюється по траєкторії руху

$$j(t) = \arccos \left[\frac{1}{e} \left(\frac{p}{r(t)} - 1 \right) \right]. \quad (8.8)$$

Період руху частинки по еліптичній траєкторії визначимо за умовою

$$T = 2 \sqrt{\frac{m}{a}} a^{\frac{3}{2}} (x - e \sin x) \Big|_{x=0}^{x=p} = 2p \sqrt{\frac{m}{a}} a^{\frac{3}{2}}. \quad (8.9)$$

Остаточно закони руху можна записати у вигляді

$$r = a(1 - e \cos x), \quad j = \arccos \left[\frac{1}{e} \left(\frac{p}{r} - 1 \right) \right], \quad t = \frac{T}{2p} (x - e \sin x)$$

і повному обороту по еліпсу відповідає параметр x , який змінюється у межах $0 \leq x \leq 2p$.

Аналогічні викладки для гіперболічної траєкторії дають результат

$$r = a(e \cosh l - 1), \quad j = \arccos \left[\frac{1}{e} \left(\frac{p}{r} - 1 \right) \right], \quad t = \sqrt{\frac{m}{a}} a^{\frac{3}{2}} (e \sinh l - l), \quad -\infty < l < \infty.$$

Задача 8.1. Показати, що в полі відштовхування рух можливий лише при $E > 0$, а траєкторія руху визначається гіперболою.

9. Закони Кеплера

Знайдені результати дозволяють тепер відновити закони руху двох тіл, взаємодія яких задається гравітаційним потенціалом

$$U(r) = -g \frac{m_1 m_2}{r}. \quad (9.1)$$

В системі центра мас радіуси-вектори цих тіл пов'язані з відносною відстанню між ними $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ встановленими раніше правилами

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}. \quad (9.2)$$

а закони руху частинки зі зведеною масою

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

у центральному полі $U(r) = \frac{a}{r}$ встановлені у попередньому параграфі.

Для фінітного руху траєкторія руху цього тіла має вигляд конічного перерізу з фокусом у центрі мас. Нехай це рівняння має вигляд

$$r = \frac{p}{1 - e \cos j},$$

тоді радіус-вектор $\mathbf{r}_1$ тіла маси m_1 у кожний момент часу має той же напрям, що і $\mathbf{r}$ ($j_1 = j$), а модулі відрізняються

$$|\mathbf{r}_1| = \frac{p_1}{1 - e \cos j_1}, \quad p_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} p < p. \quad (9.3)$$

Вектор $\mathbf{r}_2$ має протилежний напрям, так що його орієнтація, яка задається кутом j_2 , зв'язана з орієнтацією $\mathbf{r}_1$ правилом $j_2 = j + p$. Рівняння еліпса, по якому рухається тіло маси m_2 , треба записати у вигляді

$$|\mathbf{r}_2| = \frac{p_2}{1 + e \cos j_2}, \quad p_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} p < p. \quad (9.4)$$

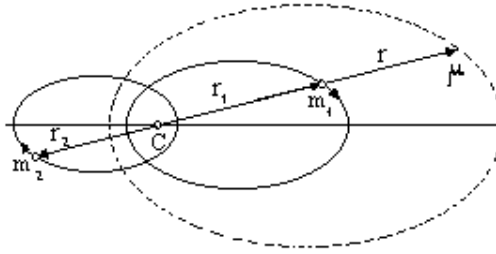


Рис.5

На рис.5 зображені траєкторії руху тіла зведеної маси, та траєкторії тіл з масами m_1 і m_2 . Якщо m_2 - маса Сонця, а m_1 - маса однієї з планет сонячної системи, то в зв'язку з фактом $m_2 \gg m_1$ еліптична траєкторія руху Сонця відносно їх центра мас має дуже малий параметр $p_1 \ll p_2$, так що орбіта Сонця менша своїх же розмірів (радіуса), тобто Сонце майже не рухається. Траєкторія ж довільної планети - еліптична.

До такого висновку емпіричним шляхом прийшов Кеплер, встановивши три закони, перший з яких стверджує, що всі планети рухаються по еліптичних траєкторіях у фокусі яких розміщено Сонце.

Другий закон Кеплера - відрізок, що з'єднує планету з Сонцем, описує рівні площини за рівні проміжки часу - є наслідком закону збереження моменту імпульса і справедливий для довільного центрального поля, тобто і для гравітаційного.

Третій закон Кеплера - відношення квадрата періоду обертання планети навколо Сонця до куба великої осі еліпса стало для усіх планет.

Дійсно, у попередньому пункті знайдено, що

$$T_1 = 2p \left[\frac{a_1^3}{g(m_1 + m_2)} \right]^{\frac{1}{2}},$$

тобто

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{4p^2}{g m_2 (1 + \frac{m_1}{m_2})}. \quad (9.5)$$

Якщо $m_1 \gg m_2$, то для усіх планет таке співвідношення стало.

Усі закони Кеплера не враховують дії інших планет на рух заданої у полі Сонця.

10. Пружне розсіяння (зіткнення) частинок

Нехай в початковий момент часу дві частинки знаходяться так далеко, що майже не взаємодіють, а напрямки початкових швидкостей такі, що з течією часу відстань між частинками зменшується. Через певний час частинки знову розлітаються на велику відстань і рухаються з практично сталими новими швидкостями. Кінцевий ефект взаємодії (зіткнення) двох частинок, який полягає в зміні початкових напрямів швидкостей, називається пружним розсіянням (зіткненням) цих частинок. Якщо ж в результаті взаємодії відстань між частинками буде сталою або нульовою, то процес називається захопленням частинок.

Для частинок, що взаємодіють за законом Кулона, випадки притягання і відштовхування відрізняються, але кінцевий результат - зміна початкових швидкостей - має місце і в тому і другому випадку, і тільки простеживши за траєкторіями, можна відповісти на запитання, притягуються чи відштовхуються частинки в процесі розсіяння.

Розсіювання чи захоплення залежить від характеру взаємодії між частинками, і в зв'язку з цим вивчення цих процесів дуже важливе у фізиці. Розсіювання називають пружним, якщо внутрішній стан частинок не змінюється.

Розсіювання частинок можна вивчати в одній з трьох систем відліку - лабораторній, системі центра мас чи системі, зв'язаній з однією з частинок. Сам процес можливо розділити на три етапи - до взаємодії, з врахуванням взаємодії та після неї.

Найпростіше вивчати процеси зіткнення в системі центра інерції. У цьому випадку радіуси-вектори частинок, пов'язані з відносною відстанню $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ виразами

$$\mathbf{r}_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_{20} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad (10.1)$$

так що їх швидкості до зіткнення $\mathbf{v}_{10}$ і $\mathbf{v}_{20}$ визначаються відносною швидкістю в лабораторній системі $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$

$$\mathbf{v}_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}_{20} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}. \quad (10.2)$$

У зв'язку з законами збереження імпульсу та енергії повний імпульс та енергія до зіткнення та після зіткнення одні і ті ж:

$$\mathbf{p}_{10} + \mathbf{p}_{20} = \mathbf{p}'_{10} + \mathbf{p}'_{20} = 0, \quad (10.3)$$

$$E = \frac{1}{2m_1} \mathbf{p}_{10}^2 + \frac{1}{2m_2} \mathbf{p}_{20}^2 = \frac{1}{2m_1} \mathbf{p}_{10}'^2 + \frac{1}{2m_2} \mathbf{p}_{20}'^2. \quad (10.4)$$

Отже, в результаті зіткнення в системі центра мас частинки змінюють лише напрям своїх швидкостей (які мають протилежний напрям як до взаємодії, так і після неї). Якщо $\mathbf{n}_0$ - одиничний вектор у напрямі вектора $\mathbf{v}_{10}'$, то

$$\mathbf{v}_{10}' = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v \mathbf{n}_0, \mathbf{v}_{20}' = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v \mathbf{n}_0. \quad (10.5)$$

Напрямок $\mathbf{n}_0$ визначається конкретним законом взаємодії. В лабораторній системі відліку треба прибавити швидкість руху центра мас $\mathbf{V} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}$, так що матимемо зв'язок для швидкостей (імпульсів) після зіткнення з швидкостями (імпульсами) до зіткнення

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1' &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} v \mathbf{n}_0 + \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}, \\ \mathbf{v}_2' &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v \mathbf{n}_0 + \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}, \end{aligned} \quad (10.6)$$

$$\mathbf{p}_1' = m v \mathbf{n}_0 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2), \mathbf{p}_2' = -m v \mathbf{n}_0 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2), \quad (10.7)$$

де $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

Формули (10.7) мають наглядні геометричні побудови. Проведемо коло з радіусом mv , та зробимо побудови, як показано на рис.6.

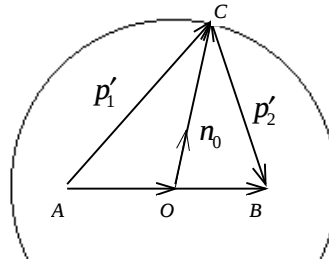


Рис. 6

$$\vec{OC} = mv, \vec{AO} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2), \vec{OB} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2),$$

Нехай частинка з масою m_2 до зіткнення не рухалась, так що $\mathbf{p}_2 = 0$.

Тоді $\vec{OB} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{p}_1 = m\vec{v}_1 = m\vec{v}$ і точка В лежить на колі (рис.7). У цьому випадку кути θ_1 і θ_2 будуть кутами відхилення частинок після взаємодії по відношенню до напрямку руху першої частинки $\vec{p}_1$. Кут χ ; який задає напрям $\vec{n}_0$, є кутом розсіювання в системі центра мас $\left(c = \vec{p}_1 \wedge \vec{n}_0 \right)$. З малюнка видно, що $2q_2 + c = p$, та $\frac{\sin q_1}{CB} = \frac{\sin q_2}{AC}$.

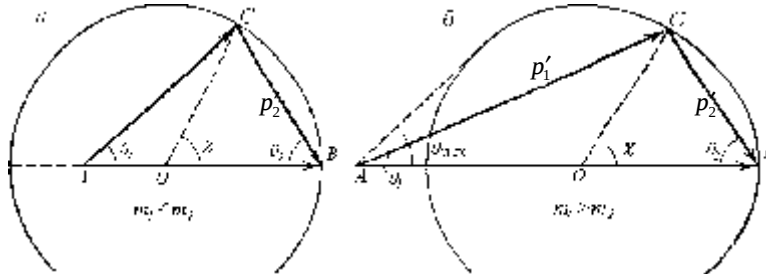


Рис. 7

Оскільки $AC = |\vec{p}'_1| = \left| m\vec{v}\vec{n}_0 + \frac{m_1}{m_2} m\vec{v} \right|$, $BC = |\vec{p}'_2| = \left| -m\vec{v}\vec{n}_0 + m\vec{v} \right|$,

та $\cos(\vec{n}_0 \wedge \vec{v}) = \cos c$, $\cos q_2 = \cos(c/2)$, то

$$\sin q_1 = \cos \frac{c}{2} \left[\frac{2(1 - \cos c)}{1 + \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 + 2\frac{m_1}{m_2} \cos c} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (10.8)$$

Після простих перетворень маємо зв'язок між кутами розсіювання частинок в лабораторній системі відліку та кутом розсіювання в системі центра мас

$$\operatorname{tg} q_1 = \frac{\sin c}{\frac{m_1}{m_2} + \cos c}, \quad q_2 = \frac{p - c}{2}. \quad (10.9)$$

Звідси випливає, що для однакових частинок ($m_1 = m_2$) після удару $q_1 = \frac{1}{2}c$, а сумарний кут відхилення $q_1 + q_2 = \frac{p}{2}$.

11. Диференціальний переріз розсіювання

Кут розсіювання χ в результаті взаємодії частинок в системі центра мас можна знайти, скориставшись результатами задачі про рух частинки зі зведеною масою m у центральному полі $U(r)$, де $U(r)$ потенціал взаємодії двох частинок.

Траєкторія руху допоміжної частинки з приведеною масою симетрична по відношенню до прямої, проведеної з найближчої точки орбіти до центра, так що асимптоти орбіти симетричні, як показано на рис. 8.

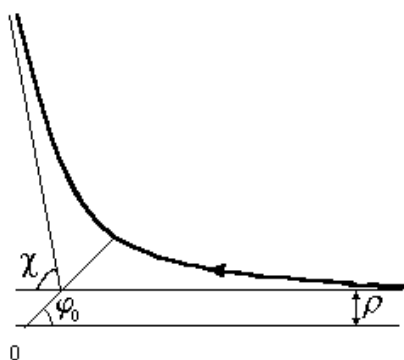


Рис. 8

З побудови видно, що $\chi = \pi - 2\varphi_0$, а кут φ_0 визначається виразом

$$\varphi_0 = M \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{2m(E - U(r)) - \frac{M^2}{r^2}}}. \quad (11.1)$$

Замість енергії і моменту імпульсу введемо постійну швидкість v_{∞} на дуже великій відстані від центра, та прицільну відстань r співвідношеннями

$$E = \frac{1}{2}mv_{\infty}^2, \quad M = mrv_{\infty}. \quad (11.2)$$

В результаті матимемо

$$\varphi_0 = r \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{r^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{mv_{\infty}^2}}}, \quad (11.3)$$

де точка повороту $r_{\min}$ визначається з умови $1 - \frac{r^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{mv_{\infty}^2} = 0$. Звідси

$$\chi(r) = \pi - 2\varphi_0(r).$$

У дослідах з розсіювання звичайно мають справу не з індивідуальним відхиленням частинки, а з розсіюванням пучка однакових частинок, що падають на мішень з однаковою швидкістю. Будемо вважати, що густина пучка мала, щоб можна було знехтувати взаємодією падаючих частинок між собою, а густина частинок мішені настільки мала, щоб не було подвійних розсіювань. При зближенні частинок пучка з частинками мішені прицільна відстань r для різних пар буде різною, і частинки будуть розсіюватися на різні кути. Визначимо через dN число частинок, розсіяних в одиницю часу на кути з інтервалу c і $c + dc$. Якщо n - інтенсивність потоку падаючих частинок (їх число в одиницю часу), то відношення

$$ds = \frac{dN}{n} \quad (11.4)$$

називається диференціальним перерізом розсіювання. Нехай в інтервал кутів між c і $c + dc$ розсіюються тільки ті частинки, прицільна відстань яких має інтервал між $r(x)$ і $r(x) + dr(x)$. Тоді кількість відхилених частинок така ж, як і падаючих у кільці з радіусами r , $r + dr$, тобто $dN = 2\pi r dr n$. Звідси

$$ds = 2\pi r dr = 2\pi r \left| \frac{dr}{dc} \right| dc \quad (11.5)$$

Оскільки тілесний кут пов'язаний з кутом c $dW = 2\pi \sin c dc$. То

$$ds = \frac{r(x)}{\sin c} \left| \frac{dr(x)}{dx} \right| dW. \quad (11.6)$$

Цей вираз визначає диференціальний переріз розсіювання в системі центра мас. В лабораторній же системі відліку ефективний переріз розсіювання залежить від кута q_1 та від кута q_2 . Якщо до розсіювання частинки мішені не рухались, то переріз розсіювання частинок з падаючого пучка можна розрахувати за допомогою формул зв'язку (10.9). Диференціальний переріз розсіювання частинок мішені підраховується простіше, оскільки $q_2 = \frac{p - c}{2}$.

Задача 11.1. Визначити диференціальний ефективний переріз розсіювання точкових частинок від абсолютно твердої кулі радіуса a

$$\left(U = \begin{cases} \infty & r < a \\ 0 & r > a \end{cases} \right).$$

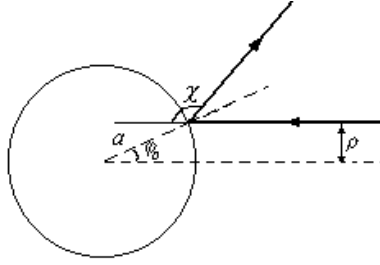


Рис. 9

Як видно з рисунка 9 $r = a \sin j_0 = a \sin \frac{p - c}{2} = a \cos \frac{c}{2}$ так що

$$ds = \frac{a \cos \frac{c}{2}}{\sin c} a \sin \frac{c}{2} dW = \frac{1}{4} a^2 dW,$$

тобто, в системі центра мас розсіювання ізотропне. Звідси $s = \int ds = p a^2$ - повний переріз розсіювання.

12. Розсіювання частинок у кулонівському полі. Формула Резерфорда

Розглянемо тепер задачу про розсіювання частинок, які взаємодіють між собою за законом Кулона

$$U(r) = \frac{a}{r}, a = q_1 q_2 \quad (12.1)$$

Для кута відхилення допоміжної частинки зі зведеною масою $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ в системі центра мас з (11.3) маємо

$$c = p - 2r \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{r^2} - \frac{2a}{mv_{\infty}^2} \frac{1}{r}}}.$$

Для нової змінної інтегрування $x = \frac{r}{r}$

$$c = p - 2 \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{1 - 2ax - x^2}}, a = \frac{a}{r mv_{\infty}^2},$$

а x_0 - корінь алгебраїчного рівняння $1 - 2ax - x^2 = 0$, тобто $x_0 = -a + \sqrt{1 + a^2}$.

Виділивши під корнем повний квадрат, маємо

$$c = p + 2 \arccos \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}.$$

З цього виразу знаходимо зв'язок між прицільною відстанню та кутом відхилення

$$r = \frac{a}{mv_{\infty}^2} \operatorname{ctg} \frac{\chi}{2}. \quad (12.2)$$

Диференціальний переріз розсіювання в системі центра мас має вигляд

$$ds = \left(\frac{a}{2mv_{\infty}^2} \right)^2 \frac{dW}{\sin^4 \frac{\chi}{2}}. \quad (12.3)$$

Цей вираз називається формулою Резерфорда, він не залежить від знака a .

Перетворення перерізу розсіювання до лабораторної системи відліку можна зробити за допомогою законів (до розсіювання частинка з масою m_2 покоїлась)

$$\operatorname{tg} q_1 = \frac{\sin c}{\frac{m_1}{m_2} + \cos c}, q_2 = \frac{p - c}{2}. \quad (12.4)$$

У випадку, коли $m_1 \ll m_2$

$$ds = \left(\frac{a}{2m_1 v_{\infty}^2} \right)^2 \frac{dW_1}{\sin^4 \frac{q_1}{2}}. \quad (12.5)$$

Ця формула відіграла дуже важливу роль у розвитку уявлень про будову атома. Після того, як було встановлено, що a -промені, які випромінюються деякими елементами, є позитивно зарядженими ядрами гелію, було запропоновано розглядати і всі інші атоми як позитивно заряджений тяжкий центр з електронами навколо нього. Тоді при розсіюванні легких зарядів на центрі має місце формула (12.5) з $a = Z_1 Z_2 e^2$, де $Z_{1,2}$ - заряди ядер, що беруть участь у процесі розсіювання в одиницях заряду електрона e .

У дослідах Резерфорда a -частинки спрямовувались на мішень у вигляді тонкої металевої фольги S . Проходячи через фольгу, вони розсіювались. За допомогою екрана D під кутом q_1 вирізувався тілесний кут dW і підраховувалась кількість DN a частинок, розсіяних за одиницю часу. З формули (12.5) випливає, що

$$DN \cdot \sin^4 \frac{q_1}{2} = \text{const}. \quad (12.6)$$

Це співвідношення перевірено експериментально, чим було підтверджено, що закон Кулона справедливий у мікросвіті.

Підкреслимо, що (12.6) не виконується при дуже великих і дуже малих кутах (або ж при дуже малих $r < 10^{-12}$ см і дуже великих $r > 10^{-9}$ см прицільних відстанях). Це пов'язано з тим, що при малих відстанях починають проявлятися сильніші короткодійчі сили - ядерні сили. При великих же прицільних відстанях взаємодія між налітаючою частинкою і ядром різко зменшується і починає проявлятися сила взаємодії α -частинки з електронами атома.

Дуже детальні досліді в 1913 р. провели Гейгер і Масден. В інтервалі кутів від 5° до 150° закон (12.6) для α -частинок, що розсіювались на золотій фользі, виконувався з точністю до 10%. В тій же серії дослідів була вивчена залежність ds від швидкості v_∞ . В 1920 р. Радвік із модифікованих дослідів по розсіюванню встановив залежність між зарядом ядра Z_2e та його порядковим номером в таблиці Менделєєва.

В результаті взаємодії падаючих частинок з частинками мішені останні можуть змінювати свій стан і вилітати з мішені. Якщо лічильник може реєструвати такі частинки, то диференціальний переріз розсіювання таких частинок визначається законом

$$ds_2 = \left(\frac{a}{mv_\infty^2}\right) \frac{dW_2}{\cos^3 q_2}. \quad (12.7)$$

При розсіюванні частинок з однаковими масами $m_1 = m_2$

$$\operatorname{tg} q_1 = \frac{\sin c}{1 + \cos c} = \operatorname{tg} \frac{c}{2},$$

так що

$$ds_1 = 2p \left(\frac{a}{mv_\infty^2}\right)^2 \frac{\cos q_1}{\sin^3 q_1} dq_1 = \left(\frac{a}{mv_\infty^2}\right)^2 \frac{\cos q_1}{\sin^4 q_1} dW_1.$$

У тому разі, коли не тільки маси однакові, але і заряди рівні $q_1 = q_2$ загальний ефективний переріз розсіювання ($q_1 = q_2 = q$)

$$ds = ds_1 + ds_2 = \left(\frac{a}{mv_\infty^2}\right)^2 \left(\frac{1}{\sin^4 q} + \frac{1}{\cos^4 q}\right) \cos q dW. \quad (12.8)$$

Нарешті, вивчення ефективного перерізу розсіювання значно зпрощується, якщо процес розсіювання проходить так, що прицільна відстань завжди велика, де поле $U(r)$ мале, і кути відхилення теж малі. У цьому разі, залишаючи лише перший член по взаємодії, матимемо

$$j_0 \approx \int_r^\infty \frac{r dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{r^2}{r^2}}} + \frac{1}{mv_\infty^2} \int_r^\infty \frac{r U(r) dr}{r^2 (1 - \frac{r^2}{r^2})^{\frac{3}{2}}} + \mathbf{L} = \frac{p}{2} + \frac{r}{mv_\infty^2} \int_r^\infty \frac{dU(r)}{dr} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - r^2}} + \mathbf{L}$$

Щоб одержати цей вираз, спочатку треба скористатись тим, що

$$\frac{r^2}{r^2} (1 - \frac{r^2}{r^2})^{-\frac{1}{2}} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{r^2}}} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \sqrt{r^2 - r^2}.$$

У зв'язку із скривленням траєкторії руху матеріальних тіл внаслідок гравітаційної взаємодії відзначимо ще один цікавий результат, пов'язаний із взаємодією гравітаційної маси з променем світла. Ще в 1804 р. було розраховано скривлення променя світла в полі тяжіння Сонця. При цьому використовувалось уявлення Ньютона про світло як потік корпускул, які можна рахувати матеріальними точковими об'єктами з невеликою масою m_n , що рухаються з швидкістю світла c . Внаслідок дуже великої їх швидкості вони пролітають по гіперболі з малою кривизною, лише незначно відхиляючись під дією Сонця, так що кут α у виразі (12.2) дуже малий, а прицільну відстань можна покласти рівною радіусу Сонця $R_\odot$, так що наближено маємо

$$\alpha \approx \frac{2a}{R_\odot mc^2} = \frac{2g(M_\odot + m_n)}{R_\odot c^2} \sim \frac{R_g}{R_\odot}.$$

В останньому співвідношенні введено гравітаційний розмір Сонця $R_g = \frac{g M_\odot}{c^2}$. Скориставшись відомими параметрами Сонця, матимемо для кута відхилення променя під дією тяжіння $\alpha \cong 0,87''$. В загальній теорії відносності також розраховано відхилення променя внаслідок гравітаційних сил, і воно становило $1,75''$, тобто в два рази більше. Така розбіжність розрахунків благодатна для дослідної перевірки справедливості передбачень, і результат першого виміру цього ефекту під час сонячного затемнення 1919 р. усі чекали з зацікавленням. Результат був ближчий до передбачення його загальною теорією відносності.

МАЛІ КОЛИВАННЯ

Малі коливання можуть бути точною чи наближеною моделлю руху багатьох задач класичної та квантової фізики, хімії чи біології. Прикладами коливань поблизу положення стійкої рівноваги можуть бути коливання математичного маятника при малих кутах відхилення, маси на пружині при малих амплітудах зміщення, малі коливання напруженості та току в електричному контурі, коливання атомів у молекулах, кристалах, звукові коливання, коливання хімічно реагуючих речовин, кількості популяції біологічних видів та інші.

13. Одновимірні малі коливання

Стійкій рівновазі одновимірної системи відповідає таке положення частинки, в якому її потенціальна енергія $U(q_0)$ має мінімум; відхилення від такого положення приводить до сили $\frac{dU}{dq}$, що повертає частинку до рівноваги. В рівноважному положенні $U'(q_0) = 0$, так що

$$U(q) = U(q_0) + \frac{1}{2}k(q - q_0)^2 + \dots, \quad k = \frac{\partial^2 U(q_0)}{\partial q_0^2}, \quad (13.1)$$

а функція Лагранжа

$$L \approx \frac{1}{2}a(q_0)\dot{q}^2 - \frac{1}{2}k(q - q_0)^2.$$

Вводячи позначення $m = a(q_0)$, $k = mw_0^2$, $x = q - q_0$, маємо

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 - w_0^2 x^2), \quad (13.2)$$

та рівняння Лагранжа

$$\ddot{x} + w_0^2 x = 0. \quad (13.3)$$

Два лінійно-незалежних розв'язки цього рівняння

$$x(t) = A_1 \cos w_0 t + A_2 \sin w_0 t = a \cos(w_0 t + a_0),$$

де a - амплітуда коливань, $w_0 t + a_0$ - фаза, w_0 - частота коливань, яка залежить лише від властивостей системи. Сталі a та a_0 визначаються з початкових умов. Оскільки малі коливання лінійні, то закони руху можна записувати в комплексній формі за допомогою експоненти

$$x(t) = \operatorname{Re} a e^{i w_0 t + a_0} = \operatorname{Re} A e^{i w_0 t}, \quad A = a e^{a_0}. \quad (13.4)$$

Знак Re можна не писати, але відповіді подавати у дійсній формі. На тіло, яке рухається в навколишньому середовищі, діє сила тертя. Енергія тіла при цьому перетворюється в тепло. Процес руху в таких умовах не є чисто механічним процесом, оскільки його вивчення потребує ще й аналізу руху частинок середовища і теплового стану всієї системи. У цьому випадку прискорення може залежити не тільки від координат чи швидкостей в заданий момент часу, а й від їх значень в усі моменти часу до заданого, так що задача вивчення руху вже не є задачею механіки. Малі ж коливання можна знову вивчити методами механіки, якщо наближено в рівняннях руху ввести силу тертя, що залежить лише від швидкості. Для одновимірного руху така сила має вигляд

$$f_{\tau} = -b \dot{x}$$

де b - додатний коефіцієнт, і знак вказує на напрям дії цієї сили по відношенню до швидкості. Рівняння руху в цьому випадку має вигляд

$$m \ddot{x} + m w_0^2 x + b \dot{x} = 0. \quad (13.5)$$

Позначимо через $l = \frac{b}{2m}$ коефіцієнт затухання, тоді

$$\ddot{x} + 2l \dot{x} + w_0^2 x = 0.$$

Розв'язок цього рівняння запишемо у вигляді

$$x(t) = A_1 e^{-r_1 t} + A_2 e^{-r_2 t},$$

де $r_{1,2}$ - корні характеристичного рівняння

$$r^2 + 2l r + w_0^2 = 0,$$

з якого знаходимо $r_{1,2} = l \pm \sqrt{l^2 - w_0^2}$. Якщо $l < w_0$, то

$$r_{1,2} = l \pm i w, \quad w = \sqrt{w_0^2 - l^2} \quad \text{і}$$

$$x(t) = \operatorname{Re} A e^{-(l+iw)t} = a e^{-lt} \cos(wt + a). \quad (13.6)$$

Цей випадок відповідає коливному затухаючому руху. Якщо $l > w_0$, то рух аперіодичний затухаючий, а при $l = w_0$

$$x(t) = (B_1 + B_2 t)e^{-\gamma t}.$$

Силу тертя можна записати через дисипативну функцію $F = \frac{1}{2} b \dot{x}^2$:

$$f_{\tau} = -\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = -b \dot{x}, \quad (13.7)$$

а рівняння Лагранжа у вигляді

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x}. \quad (13.8)$$

Знайдемо, як змінюється енергія системи з часом

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} - L \right) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \ddot{x} + \dot{x} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \left(\frac{\partial L}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \ddot{x} \right) = -\dot{x} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = -2F.$$

Оскільки $\frac{dE}{dt} < 0$, то $F > 0$ і $b > 0$.

14. Вимушені коливання

Якщо на частинку діє ще й зовнішня сила, то рівняння руху має вигляд

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t), \quad (14.1)$$

або

$$\ddot{x} + 2l\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m} F(t). \quad (14.2)$$

Нехай зовнішня сила періодична $F(t) = f \cos \omega t$. Тоді маємо рівняння руху

$$\ddot{x} + 2l\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} e^{i\omega t}.$$

Це неоднорідне диференціальне рівняння і його розв'язок складається з розв'язку однорідного рівняння та частинного, який повинен мати часову залежність з періодом ω

$$x(t) = B e^{i\omega t}. \quad (14.3)$$

З течією часу внаслідок тертя розв'язок однорідного рівняння буде експоненційно зменшуватись, так що залишиться лише (14.3) з амплітудою

$$B = \frac{f}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - g^2 + 2l ig} = |B| e^{id},$$

де

$$|B| = \frac{f}{m} \frac{1}{[(\omega_0^2 - g^2)^2 + 4l^2 g^2]^{\frac{1}{2}}}, \quad \operatorname{tg} d = -\frac{2lg}{\omega_0^2 - g^2}.$$

Таким чином, після перехідного процесу $t \gg \frac{1}{l}$ залишається лише періодичний вклад

$$x(t) = \frac{f}{m} \frac{1}{[(\omega_0^2 - g^2)^2 + 4l^2 g^2]^{\frac{1}{2}}} \cos(\omega t - \operatorname{arctg} \frac{2lg}{\omega_0^2 - l^2}).$$

Фаза d вимушених коливань завжди від'ємна по відношенню до фази зовнішньої сили (нуль в наших умовах), тобто коливання "запізнюються".

Встановимо умови резонансу коливань по амплітуді, тобто, знайдемо ту частоту зовнішньої сили, при якій буде максимальною амплітуда коливань. З умови $\frac{\partial}{\partial g} B = 0$ маємо

$$g_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2l^2} \neq \omega = \sqrt{\omega_0^2 - l^2}.$$

Можна встановити умови резонансу по амплітуді швидкості руху, тобто з умови $\frac{\partial}{\partial g} g B = 0$. У цьому разі $g_{\text{рез}} = \omega_0$. Амплітуда B резонансу

має найбільше з можливих при даних умовах значення $\frac{f_0}{2l\omega_0 m}$. Якщо

ж тертя різко зменшується $l \rightarrow 0$, то в умовах резонансу амплітуда необмежено збільшується, і вся теорія малих коливань уже не працює. Закон руху при цьому можна знайти за правилом Лопіталю

$$x(t) = \frac{f}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t.$$

15. Малі коливання систем з довільним числом ступенів вільності

Функція Лагранжа механічної системи з s ступенями вільності має вигляд

$$L = T - U, T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^s a_{ij}(q_1, \mathbf{K}, q_s) \dot{q}_i \dot{q}_j, U = U(q_1, \mathbf{K}, q_s). \quad (15.1)$$

Положення рівноваги системи визначається таким станом системи, при якому всі $\dot{q}_o = 0$, а q_l задовольняють умовам

$$F_l = -\frac{\partial U}{\partial q_l} = 0, l = 1, 2, \mathbf{K}, s. \quad (15.2)$$

Ці рівняння є системою s алгебраїчних рівнянь, що визначають екстремальні точки q_{l0} , в яких відсутні узагальнені сили F_l . Будемо вивчати малі коливання біля положення стійкої рівноваги. Стан рівноваги буде стійким, якщо при малому збуренні, що виводить систему з положення рівноваги, відхилення з цього положення q_{l0} в будь-який момент часу буде обмеженим. Достатньою умовою є умова, що потенціальна енергія в цьому стані мінімальна, тобто другі похідні в положенні рівноваги

$$k_{ij} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right)_{q=q_0}$$

задовольняють додатності кожного з наведених нижче визначників (детермінантів)

$$k_{11} > 0, \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \det k_{ij} = \begin{vmatrix} k_{11} & \mathbf{K} & k_{1s} \\ k_{21} & \mathbf{K} & k_{2s} \\ \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} \\ k_{s1} & \mathbf{K} & k_{ss} \end{vmatrix} > 0. \quad (15.3)$$

Введемо координати $x_l = q_l - q_{l0}$ і зобразимо функцію Лагранжа у вигляді степеневого розкладу за малими зміщеннями

$$L \approx \frac{1}{2} \sum_{ij} (m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - k_{ij} x_i x_j),$$

де $m_{ij} = m_{ji} = a_{ij}(q_{10}, \mathbf{K}, q_{s0})$. Рівняння Лагранжа мають вигляд

$$\sum_{l=1}^s (m_{il} \ddot{x}_l - k_{il} x_l) = 0, i = 1, 2, \mathbf{K}, s. \quad (15.4)$$

Це система однорідних лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами. Розв'язок будемо шукати у вигляді

$$x_l(t) \sim A_l e^{i\omega t}. \quad (15.5)$$

Для коефіцієнтів A_l маємо систему лінійних алгебраїчних однорідних рівнянь

$$\sum_{l=1}^s (-\omega^2 m_{il} + k_{il}) A_l = 0, i = 1, 2, \mathbf{K}, s. \quad (15.6)$$

Умова їх розв'язку зводиться до характеристичного рівняння (вікового рівняння)

$$\begin{vmatrix} -w^2 m_{11} + k_{11} & -w^2 m_{12} + k_{12} & \mathbf{K} & -w^2 m_{1s} + k_{1s} \\ \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} \\ -w^2 m_{s1} + k_{s1} & -w^2 m_{s2} + k_{s2} & \mathbf{K} & -w^2 m_{ss} + k_{ss} \end{vmatrix} = 0 \quad (15.7)$$

ступеня s відносно w^2 . Розв'язок (корні рівняння) позначимо $w_a^2, a=1,2,\mathbf{K},s$. Це власні частоти коливань системи. Вони дійсні і додатні. Покажемо, що це так. Систему алгебраїчних рівнянь (15.6) домножимо на комплексно-спряжене значення A_i^* і візьмемо суму по i , звідки

$$w^2 = \frac{\sum_{il} k_{il} A_i^* A_l}{\sum_{il} m_{il} A_i^* A_l}. \quad (15.8)$$

Квадратичні форми в чисельнику і знаменнику дійсні. Оскільки $k_{il} = k_{li}$, то

$$\left(\sum_{il} k_{il} A_i^* A_l \right)^* = \sum_{il} k_{il} A_i A_l^* = \sum_{il} k_{li} A_l A_i^*.$$

Аналогічно для знаменника, тобто і чисельник і знаменник - дійсні. Якщо записати $A_l = a_l + ib_l$, то

$$\sum_{il} k_{il} A_i A_l = \sum_{il} k_{il} [a_i a_l + b_i b_l + i(a_i b_l - a_l b_i)].$$

Кожна з сум - додатно визначена квадратична форма, оскільки умова додатності точно така ж, як (15.3). Таким чином, в (15.8) чисельник і знаменник не тільки дійсні, але й додатні, так що $w^2 > 0$

Нехай всі власні частоти w_a^2 - різні. Кожній частоті відповідає своя система коефіцієнтів A_{1a} , тобто

$$x_l(t) = \sum_{a=1}^s A_{1a} e^{i w_a t}.$$

Оскільки детермінант системи нульовий, а w_a - різні, то одне з рівнянь (15.6) являється лінійною комбінацією усіх інших. Відкинемо останнє з рівнянь

$$\begin{cases} (-w_a^2 m_{11} + k_{11}) A_{1a} + \mathbf{K} + (-w_a^2 m_{1,s-1} + k_{1,s-1}) A_{s-1,a} = (-w_a^2 m_{1s} + k_{1s}) A_{sa}, \\ \dots \\ (-w_a^2 m_{s-1,1} + k_{s-1,1}) A_{1a} + \mathbf{K} + (-w_a^2 m_{s-1,s-1} + k_{s-1,s-1}) A_{s-1,a} = (-w_a^2 m_{s,s} + k_{s,s}) A_{sa} \end{cases} \quad (15.9)$$

Звідси, користуючись правилом Крамера, маємо розв'язок

$$A_{la} = A_{sa} \frac{D_l(w_a^2)}{D(w_a^2)}, \quad (15.10)$$

де $D(w_a^2)$ - визначник неоднорідної системи (15.9), а $D_j(w_a^2)$ - визначник, в якому j -тий стовбець замінений стовбцем вільних членів (без A_{sa}), D_j - мінор системи (15.6). Отже, закони руху мають вигляд

$$x_l(t) = \operatorname{Re} \sum_{a=1}^s A_{la} e^{i w_a t} = \operatorname{Re} \sum_{a=1}^s D_l(w_a^2) c_a e^{i w_a t},$$

$$l = 1, \mathbf{K}, s.$$

Тут

$$c_a = \frac{A_l}{D(w_a^2)}, D_s \equiv D.$$

Введемо позначення $B_a(t) = \operatorname{Re} l_a e^{i w_a t} = |c_a| \cos(w_a t + y_a)$, тоді

$$x_l(t) = \sum_{a=1}^s D_l(w_a^2) B_a(t)$$

і рух кожної з координати являє собою суперпозицію s періодичних коливань $B_a(t)$ з власними частотами w_a і довільними амплітудами і фазами, пов'язаними з початковими умовами. Кожне з коливань називається головним або нормальним.

16. Нормальні координати

Введемо тепер нові узагальнені нормальні координати

$$Q_a(t) = \sqrt{d_a} B_a(t), x_l(t) = \sum_a \frac{D_l(w_a^2)}{\sqrt{d_a}} Q_a(t) \quad (16.1)$$

(d_a визначимо нижче), та визначимо через них функцію Лагранжа. Насамперед доведемо, що виконуються умови ортогональності

$$\sum_{lk} m_{lk} D_l(w_a^2) D_k(w_b^2) = d_a d_{ab},$$

$$\sum_{lk} k_{lk} D_l(w_a^2) D_k(w_b^2) = b_a d_{ab}. \quad (16.2)$$

Ці ж вирази при $a = b$ визначають d_a і b_a відповідно. Оскільки $A_{la} \sim D_l(w_a^2)$, то з (15.6) маємо

$$\sum_{l=1}^s (-w_a^2 m_{jl} + k_{jl}) D_l(w_a^2) = 0. \quad (16.3)$$

Звідси

$$\sum_{l,j} (-w_a^2 m_{jl} + k_{jl}) D_l(w_a^2) D_j(w_b^2) = 0.$$

Аналогічно

$$\sum_{l,j} (-w_b^2 m_{jl} + k_{jl}) D_l(w_b^2) D_j(w_a^2) = 0.$$

У цьому виразі змінимо індекси суми i на j і j на i , а потім віднімемо від першого

$$(w_a^2 - w_b^2) \sum_{lj} m_{lj} D_l(w_a^2) D_j(w_b^2) = 0.$$

Звідси при $w_a^2 \neq w_b^2$ маємо умову ортогональності з (16.2). Аналогічно з (16.3) маємо другу умову ортогональності з (16.2). Якщо в (16.3) $a = b$, то

$$w_a^2 = \frac{\sum_{lj} k_{lj} D_l(w_a^2) D_j(w_a^2)}{\sum_{lj} m_{lj} D_l(w_a^2) D_j(w_a^2)} = \frac{b_a}{d_a}, \quad (16.4)$$

тобто, маємо зв'язок між b_a і d_a . Після цього кінетична і потенціальна енергія після підстанови (16.1) з умовою (16.2) приймають вигляд

$$T = \frac{1}{2} \sum_{jk} m_{jk} \sum_{ab} \frac{\Phi_a \Phi_b}{\sqrt{d_a d_b}} D_j(w_a^2) D_k(w_b^2) = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^s \Phi_a^2,$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^s w_a^2 Q_a^2.$$

Функція Лагранжа в нормальних координатах має вигляд суми функцій Лагранжа

$$L = \sum_{a=1}^s L_a = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^s (\Phi_a^2 - w_a^2 Q_a^2), \quad (16.5)$$

а рівняння руху розпадаються на незалежні

$$\begin{cases} \Phi_g - w_g^2 Q_g = 0 \\ g = 1, \mathbf{K}, s. \end{cases} \quad (16.6)$$

Таким чином, для механічної системи з довільними малими коливаннями завжди можна ввести систему незалежних гармонічних осциляторів, частоти яких визначаються віковим рівнянням. Закони ж руху для $x_1(t)$ визначаються мінорами D_1 по (16.1).

17. Малі коливання подвійного маятника

Функція Лагранжа плоского подвійного математичного маятника у декартових координатах має вигляд

$$L = T - U, U = -m_1 g x_1 - m_2 g x_2,$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \quad (17.1)$$

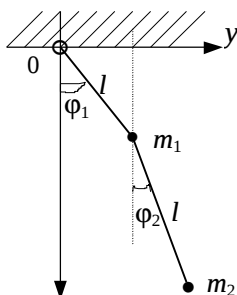


Рис. 10

На рух частинок накладені дві умови зв'язку

$$x_1^2 + y_1^2 = l^2, (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l^2,$$

так що система має два ступеня вільності. Введемо дві узагальнені координати j_1 і j_2 . Декартові координати визначаються через узагальнені співвідношеннями

$$x_1 = l \cos j_1, y_1 = l \sin j_1,$$

$$x_2 = l \cos j_1 + l \cos j_2, y_2 = l \sin j_1 + l \sin j_2.$$

Потенціальна і кінетична енергія в таких координатах мають вигляд

$$U = -(m_1 + m_2)gl \cos j_1 - m_2 gl \cos j_2,$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 l^2 \dot{j}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 [\dot{j}_1^2 + \dot{j}_2^2 + 2 \cos(j_1 - j_2) \dot{j}_1 \dot{j}_2]. \quad (17.2)$$

Знайдемо положення стійкої рівноваги. З умов

$$\frac{\partial U}{\partial j_1} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial j_2} = 0 \quad (17.3)$$

маємо чотири екстремальні точки $(0,0)$, $(0,p)$, $(p,0)$, (p,p) . Другі похідні в цих точках мають такі значення

	k_{11}	$k_{12} = k_{21}$	k_{22}	
00	$gl(m_1 + m_2)$	0	glm_2	
0p	$gl(m_1 + m_2)$	0	$-glm_2$	
p0	$-gl(m_1 + m_2)$	0	glm_2	
pp	$-gl(m_1 + m_2)$	0	$-glm_2$	(17.4)

Умовам стійкої рівноваги задовольняє точка $j_1 = 0, j_2 = 0$. Функція Лагранжа для малих коливань поблизу цієї точки має вигляд

$$L = \frac{l^2}{2} [(m_1 + m_2) \dot{j}_1^2 + m_2 \dot{j}_2^2 + 2m_2 \dot{j}_1 \dot{j}_2] - \frac{lg}{2} [(m_1 + m_2) j_1^2 + m_2 j_2^2]. \quad (17.5)$$

Рівняння руху запишемо у вигляді

$$\ddot{j}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \ddot{j}_2 + \frac{g}{l} j_1 = 0, \quad (17.6)$$

$$\ddot{j}_1 + \ddot{j}_2 + \frac{g}{l} j_2 = 0.$$

Введемо позначення $w_0^2 = \frac{g}{l}$, $a^2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$ і будемо шукати розв'язок рівнянь у вигляді

$$j_1 \sim A_1 e^{iwt}, \quad j_2 \sim A_2 e^{iwt}.$$

Для амплітуд маємо систему алгебраїчних рівнянь

$$(-w^2 + w_0^2) A_1 - a^2 w^2 A_2 = 0,$$

$$-w^2 A_1 + (-w^2 + w_0^2) A_2 = 0.$$

Звідси вікове рівняння

$$(-w^2 + w_0^2)^2 - a^2 w^4 = 0,$$

корні якого $w_{1,2}^2 = \frac{w_0^2}{1 \pm a}$, так що розв'язок диференціальних рівнянь можна записати у вигляді

$$j_1(t) = A_1^{(1)} e^{i w_1 t} + A_1^{(2)} e^{i w_2 t}, \quad j_2(t) = A_2^{(1)} e^{i w_1 t} + A_2^{(2)} e^{i w_2 t}.$$

Залишаючи тільки перше з алгебраїчних рівнянь, маємо

$$\begin{aligned}(-w_1^2 + w_0^2)A_1^{(1)} &= a^2 w_1^2 A_2^{(1)}, \\ (-w_2^2 + w_0^2)A_1^{(1)} &= a^2 w_2^2 A_2^{(1)},\end{aligned}$$

тобто

$$A_1^{(1)} = -a A_2^{(1)}, A_1^{(2)} = a A_2^{(2)}. \quad (17.7)$$

Остаточно загальний розв'язок рівнянь руху має вигляд $(A_1^{(1,2)} = a_{1,2} e^{ij_{1,2}})$

$$\begin{aligned}j_1(t) &= a_1 \cos(w_1 t + y_1) + a_2 \cos(w_2 t + y_2), \\ j_2(t) &= \frac{a_1}{a} \cos(w_1 t + y_1) + \frac{a_2}{a} \cos(w_2 t + y_2).\end{aligned} \quad (17.8)$$

Чотири довільних константи інтегрування визначаються з початкових умов. Скористаємося такими початковими умовами

$$j_1(0) = 0, j_2(0) = j_0, \dot{j}_1(0) = 0, \dot{j}_2(0) = 0.$$

З виразу (17.8) маємо

$$\begin{aligned}a_1 \cos y_1 + a_2 \cos y_2 &= 0, -a_1 \sin y_1 + a_2 \sin y_2 = a j_0, \\ a_1 w_1 \sin y_1 + a_2 w_2 \sin y_2 &= 0, a_1 w_1 \cos y_1 - a_2 w_2 \cos y_2 = 0.\end{aligned}$$

З двох останніх рівнянь $\sin y_1 = \sin y_2 = 0$, тобто $y_1 = y_2 = 0$. Два перші

тепер дають розв'язок $a_1 = -\frac{a}{2} j_0, a_2 = \frac{a}{2} j_0$, так що

$$\begin{aligned}j_1(t) &= -\frac{1}{2} j_0 a [\cos w_1 t - \cos w_2 t] = j_0 a \sin\left(\frac{w_1 - w_2}{2} t\right) \sin\left(\frac{w_1 + w_2}{2} t\right), \\ j_2(t) &= \frac{1}{2} j_0 a [\cos w_1 t + \cos w_2 t] = j_0 a \cos\left(\frac{w_1 - w_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{w_1 + w_2}{2} t\right).\end{aligned} \quad (17.9)$$

Оскільки

$$\frac{w_1 \pm w_2}{2} = \frac{w_0}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-a}} \pm \frac{1}{\sqrt{1+a}} \right),$$

то найпростішим для аналізу є випадок, коли $a = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 \ll 1$, тобто

$m_1 \ll m_2$. В цьому разі

$$\frac{w_1 + w_2}{2} \approx w_0, \frac{w_1 - w_2}{2} \approx \frac{1}{2} a w_0$$

і розв'язок (17.9) має вигляд

$$\begin{aligned}j_1(t) &= a B_1(t) \sin w_0 t, j_2(t) = B_2(t) \cos w_0 t, \\ B_1(t) &= j_0 \sin\left(\frac{1}{2} a w_0 t\right), B_2(t) = j_0 \cos\left(\frac{1}{2} a w_0 t\right).\end{aligned}$$

Його можна інтерпретувати як гармонічні коливання з частотою ω_0 і змінною амплітудою, період якої $T \approx \frac{4p}{a\omega_0} \ll \frac{2p}{\omega_0}$. У початковий момент часу амплітуда нижнього маятника має максимальне значення j_0 , амплітуда верхнього - нуль. З часом амплітуда нижнього маятника зменшується і в момент часу $t_1 = T/4$ дорівнює нулю, а амплітуда верхнього маятника в цей час набуває максимального значення $\frac{j_0}{a}$. Потім процес повторюється у зворотному порядку. Це явище називається биттям, і відбувається періодичне перекачування енергії від одного маятника до іншого.

18. Коливання ланцюжка пов'язаних осциляторів (коливання атомів лінійної ґратки)

Найбільш груба модель, яка відповідає твердому тілу (кристалічному аргону), зображає собою систему твердих точкових частинок, пов'язаних між собою пружинками. Якщо одна з частинок зміщується з положення рівноваги, то змістяться і сусідні, і по усій структурі побіжить хвиля зміщень.

Рух нескінченної одновимірної ґратки з однакових рівновіддалених частинок можливо описати, якщо ввести для n -ї частинки відхилення x'_n від рівноважного положення na , так що її координата

$$x_n = na + x'_n, \quad (18.1)$$

де a - постійна ґратки, і $x'_n \ll a$. Відстань між n -ю та $n+1$ -ю довільними частинками

$$d x_{n,n+1} = x_{n+1} - x_n = la + x'_{n+1} - x'_n.$$

Повна потенціальна енергія при таких умовах має вигляд

$$U = \sum_n \sum_{l \neq 0} U(|x_{n+l} - x_n|) \approx \sum_{nl} U(la) + \frac{1}{2} \sum_{nl} W''(la) (x'_{n+l} - x'_n)^2.$$

Величина $W''(la)$ аналогічна коефіцієнту пружності. Закон руху для частинки з масою m має вигляд

$$m \ddot{x}_p = \sum_{l \neq 0} W_l'' (x'_{p+l} + x'_{p-l} - 2x'_p), \quad p = 1, 2, K \quad (18.2)$$

Розв'язок рівнянь будемо шукати у вигляді повздовжніх хвиль

$$x'_p \sim A e^{i\omega t - i k p a}. \quad (18.3)$$

Підставляючи (18.3), приходимо до висновку, що частота і хвильове число $k = \frac{2p}{l}$ повинні задовольняти умові

$$\omega^2 = -\sum_l \frac{1}{m} W_l'' (e^{ikl} + e^{-ikl} - 2) = \sum_l \frac{4W_l''}{m} \sin^2 \frac{akl}{2}. \quad (18.4)$$

Це рівняння називають дисперсійним, частота ω являється періодичною функцією хвильового числа k з періодом $\frac{2\pi}{a}$, так що всі можливі коливання знайдемо, розглядаючи k з інтервалу $-\frac{\pi}{a} \leq k \leq \frac{\pi}{a}$. Якщо в ґратці кожна з частинок взаємодіє тільки з сусідньою, то замість (18.4) маємо

$$\omega^2 = \frac{4k}{m} \sin^2 \frac{ka}{2}, \quad k = W_1'. \quad (18.5)$$

Частоти коливань в залежності від хвильового числа наведені на рис.11.

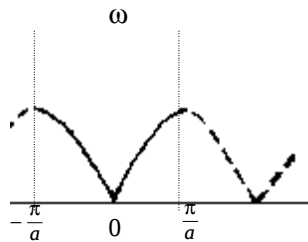


Рис.11

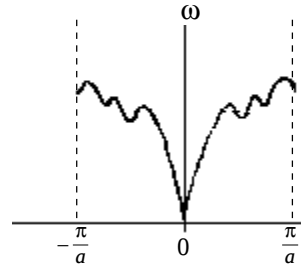


Рис.12

Для більш загального випадку (карбід, лінійні полімери) дисперсійна залежність одновимірної ґратки з врахуванням далекої взаємодії має вигляд, який показано на рис. 12. В цьому випадку хвильове число k може бути багатозначною функцією частоти ω .

Електричним аналогом одновимірної ґратки з однакових рівновіддалених частинок є ланцюг з послідовно з'єднаних індуктивностей λ і ємкостей C . Такий λC -ланцюг поводить себе як фільтр низьких частот і задовольняє рівнянням зміни току

$$\frac{d^2}{dt^2} i_n(t) = \frac{1}{lC} (i_{n-1} + i_{n+1} - 2i_n) \quad (18.6)$$

які такі ж, як і (18.2).

Іншим прикладом пов'язаних осциляторів є ланцюг магнітних стрілок у зовнішньому магнітному полі з взаємодією між найближчими. Така модель корисна при вивченні феромагнітних кристалів, і пов'язана з можливістю розповсюдження магнітностатичних хвиль в магнітноупорядкованих середовищах.

Рекомендована література

1. Голдстейн Г. Классическая механика. М. 1957; 1975.
2. Ольховский И.И. Курс теоретической механики для физиков. МГУ.1974.
3. Федорченко А.М. Теоретична фізика: т.1. Класична механіка і електродинаміка. К. 1992.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М. 1973.
5. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.1974.
6. Павленко Ю.Г. Лекции по теоретической механике. МГУ. 1991.
7. Коткин Г.Л., Сербо В.Г. Сборник задач по классической механике. М. 1977.
8. Тер-Хаар Д. Основы гамильтоновой механики. М. 1974.
9. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний. М. 1972.

З М І С Т

Класична механіка Лагранжа	3
1. Принцип найменшої дії (принцип Гамільтона)	3
2. Властивості функції Лагранжа. Принцип відносності Галілея.	7
3. Функція Лагранжа вільної матеріальної частинки та системи взаємодіючих частинок. Рух при накладених зв'язках	8
4. Закони збереження та їх зв'язок з однорідністю часу та однорідністю і ізотропністю простору	11
5. Закони одновимірного руху	15
6. Задача двох тіл. Зведена маса	16
7. Рух у центральному полі	18
8. Задача Кеплера	20
9. Закони Кеплера	23
10.Пружне розсіювання (зіткнення) частинок	25
11.Диференціальний переріз розсіювання	28
12.Розсіювання частинок у кулонівському полі. Формула Резерфорда	31
Малі коливання	35
13.Одновимірні малі коливання	35
14.Вимушені коливання	37
15.Малі коливання систем з довільним числом ступенів вільності	38
16.Нормальні координати	41
17.Малі коливання подвійного маятника	43
18.Коливання ланцюжка пов'язаних осциляторів (коливання атомів лінійної ґратки)	46
Рекомендована література	48